Nichtlineare Spinorgleichungen und affiner Zusammenhang

Von G. BRAUNSS

Mathematisches Institut der Technischen Hochschule Darmstadt

(Z. Naturforschg. 19 a, 825—827 [1964]; eingegangen am 14. März 1964)

It is shown that the non-linear term of the HEISENBERG–PAULI-equation can be interpreted as torsion of space-time in the following way. The wavefunction is subjected to a (non-rigid) LORENTZ-transformation varying from point to point: $\psi=S\psi'$. If the matrix $S=S(x)$ is chosen so that it satisfies the equation $\gamma_\lambda(\partial S/\partial x^\lambda)\,S^{-1}+l^2\,\gamma_\lambda\,\gamma_5\,\psi\,\overline{\psi}\,\gamma_\lambda\,\gamma_5\,\psi=0$, than the non-linear term of the H.-P.-equation vanishes in the system x'; i. e.
with $(\partial x^\lambda/\partial x^{\mu'})\,\gamma_\mu=S^{-1}\,\gamma_\lambda\,S$ one has $0=\gamma_\lambda(\partial\psi/\partial x^\lambda)+l^2\,\gamma_\lambda\,\gamma_5\,\psi\,\overline{\psi}\,\gamma_\lambda\,\gamma_5\,\psi\equiv S\,\gamma_\mu(\partial\psi'/\partial x^{\mu'})$.
This result holds also in the case where the H.-P.-equation contains still a term with $\gamma_\lambda\,\overline{\psi}\,\gamma_\lambda\,\psi$ and/or $\gamma_\lambda\,A_\lambda$ (A_λ = electro-magnetic potential), provided A_λ satisfies the LORENTZ-condition $\partial A_\lambda/\partial x_\lambda=0$. The proof is a follows: Taking a representation of S in the DIRAC-ring, the equation which determines S splits into 8 equations. Between these equations there exist 2 identities (which correspond to the PAULI–GÜRSEY-transformation resp. LORENTZ-condition); so one finally has 6 equations for the determination of the 6 parameters of S.

In einer unlängst veröffentlichten Arbeit von RODIČEV [1] wurde eine geometrische Deutung des nichtlinearen Terms der von HEISENBERG und PAULI vorgeschlagenen Spinorgleichung [2] gegeben. Dabei wird von folgenden Voraussetzungen ausgegangen:

1. Die Komponenten des affinen Zusammenhangs (im RIEMANNschen Raum) sind nicht symmetrisch. Das heißt, es gilt für sie

$$G^\lambda_{\mu\nu} \underset{\text{def.}}{=} \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + C^\lambda_{\mu\nu}. \tag{1}$$

Die $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ sind die bekannten CHRISTOFFEL-Symbole, also symmetrisch in den unteren Indizes. Die $C^\lambda_{\mu\nu}$ sind die Komponenten eines vollständig antisymmetrischen Tensors 3. Stufe; sie repräsentieren die Windung des Raumes. Betrachtet wird der Sonderfall, daß der Raum keine Krümmung, sondern nur eine Windung besitzt. Die $\Gamma^\nu_{\mu\nu}$ können also identisch zum Verschwinden gebracht werden; die $C^\lambda_{\mu\nu}$ sind dagegen von Null verschieden.

2. Die Feldgleichungen werden durch Variation von

$$\int (L-b\,R)\,\mathrm{d}^4x\,,\ b=\text{const.} \tag{2}$$

gewonnen. R ist die metrische Invariante (Spur des verjüngten RIEMANNschen Tensors); für $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\equiv 0$, $C^\lambda_{\mu\nu}\neq 0$ nimmt sie folgende Gestalt an [3]:

$$R=C_{\lambda\mu\nu}\,C_{\lambda\mu\nu}\,. \tag{3}$$

L hat die Gestalt

$$L=\tfrac{1}{2}\,[\overline{\psi}\,\gamma_\mu(\psi_{,\mu}-\Gamma_\mu\,\psi)-(\overline{\psi}_{,\mu}-\overline{\psi}\,\overline{\Gamma}_\mu)\,\gamma_\mu\,\psi]. \tag{4}$$

Für die Γ_μ (Komponenten des affinen Zusammenhangs im Spinorkalkül) gilt im vorliegenden Fall ($\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\equiv 0$)

$$\Gamma_\mu=-\overline{\Gamma}_\mu=\tfrac{1}{4}\,C_{\mu\alpha\beta}\,\gamma_\alpha\,\gamma_\beta\,. \tag{5}$$

Variiert man (3) nach $C_{\lambda\mu\nu}$, so folgt

$$C_{\lambda\mu\nu}=(1/8\,b)\;\overline{\psi}\,\gamma_\lambda\,\gamma_\mu\,\gamma_\nu\,\psi\quad(\lambda\neq\mu\neq\nu\neq\lambda). \tag{6}$$

Variation nach $\overline{\psi}$ unter Benutzung dieser Beziehung liefert die oben zitierte nichtlineare Spinorgleichung

$$\gamma_\lambda\,\psi_{,\lambda}+(1/32\,b)\,(\overline{\psi}\,\gamma_\lambda\,\gamma_\mu\,\gamma_\nu\,\psi)\;\gamma_\lambda\,\gamma_\mu\,\gamma_\nu\,\psi\qquad(\lambda\neq\mu\neq\nu\neq\lambda)$$
$$=\gamma_\lambda\,\psi_{,\lambda}+l^2(\overline{\psi}\,\gamma_\lambda\,\gamma_5\,\psi)\;\gamma_\lambda\,\gamma_5\,\psi=0\,,\ l^2=3\,b/16\,. \tag{7}$$

Der nichtlineare Term kann also in diesem Zusammenhang als Ausdruck für eine dem Raum eingeprägte Windung verstanden werden.

Zu dieser Deutung kann man auch auf einem anderen mehr gruppentheoretischen Weg gelangen, der direkter ist und das etwas problematische Variationsprinzip vermeidet. Das soll im folgenden gezeigt werden.

[1] V. I. RODIČEV, Soviet Phys.-JETP 40, 1169 [1961].
[2] H. P. DÜRR, W. HEISENBERG, H. MITTER, S. SCHLIEDER u. K. YAMAZAKI, Z. Naturforschg. 14 a, 441 [1959].
[3] Über doppelt auftretende Indizes ist zu summieren, Komma bezeichnet partielle Ableitung.

Zunächst sei zur Abkürzung

$$\pi_\lambda = \gamma_\lambda \gamma_5, \qquad C_\lambda = l^2 \, \overline{\psi} \gamma_\lambda \gamma_5 \psi \tag{8}$$

gesetzt, so daß Gl. (7) in der Form

$$\gamma_\lambda \psi_{,\lambda} + C_\lambda \pi_\lambda \psi = 0 \tag{9}$$

geschrieben werden kann.

ψ werde nun einer von Punkt zu Punkt veränderlichen LORENTZ-Transformation unterworfen:

$$\psi = S \psi'. \tag{10}$$

S ist definiert durch

$$\alpha_{\lambda\mu} \gamma_\mu = S^{-1} \gamma_\lambda S; \tag{11}$$

die $\alpha_{\lambda\mu}$ sind die Koeffizienten einer allgemeinen LORENTZ-Transformation. (Zum Beispiel gilt für eine räumliche Drehung um die z-Achse mit dem Drehwinkel φ: $S_{xy} = \cos \frac{1}{2} \varphi + \gamma_1 \gamma_2 \sin \frac{1}{2} \varphi$.) Schreibt man eine allgemeine LORENTZ-Transformation als Produkt der einzelnen LORENTZ-Transformationen und führt man die Bezeichnungen

$$\begin{gathered} \beta_0 = 1, \ \beta_1 = \gamma_2 \gamma_3, \ \beta_2 = \gamma_3 \gamma_1, \ \beta_3 = \gamma_1 \gamma_2, \\ \beta_4 = \gamma_1 \gamma_4, \ \beta_5 = \gamma_2 \gamma_4, \ \beta_6 = \gamma_3 \gamma_4, \ \beta_7 = \gamma_5 \end{gathered} \tag{12}$$

ein, so erkennt man leicht, daß sich S in der Form

$$S = f_A \beta_A \qquad A = 0, 1, \ldots, 7 \tag{13}$$

schreiben läßt; die f_A sind gewöhnliche komplexe Größen (Parameter).

Durch die Transformation (10) geht Gl. (9) über in

$$\gamma_\lambda S \psi'_{,\lambda} + (\gamma_\lambda S_{,\lambda} S^{-1} + \pi_\lambda C_\lambda) \, S \psi' = 0. \tag{14}$$

Es soll nun das Verschwinden des in der Klammer stehenden Ausdruckes gefordert werden; d. h., es wird

$$\gamma_\lambda S_{,\lambda} S^{-1} + \pi_\lambda C_\lambda = 0 \tag{15}$$

gesetzt. Da die Transformationen S eine Gruppe bilden, so kann man den Ausdruck $S_{,\lambda} S^{-1}$ in der folgenden Form schreiben

$$S_{,\lambda} S^{-1} = E_{\lambda A} \beta_A \quad A = 0, 1, \ldots, 7. \tag{16}$$

Nun gilt allgemein

$$\sum_{\mu=1}^{4} a_\mu \gamma_\mu \sum_{A=0}^{7} b_A \beta_A = \sum_{\nu=1}^{4} (c_\nu \gamma_\nu + d_\nu \pi_\nu); \tag{17}$$

a_μ, b_A, c_μ, d_μ sind gewöhnliche komplexe Zahlen. Das heißt, die Multiplikation eines Elementes des durch die γ_μ aufgespannten Raumes mit einem Element des durch die β_A aufgespannten Raumes liefert ein Element des Raumes, der durch die γ_μ und die π_μ aufgespannt wird.

Gl. (15) zerfällt daher in 8 Gleichungen, zwischen denen jedoch 2 Identitäten bestehen (s. Anhang). Es bleiben daher höchstens 6 voneinander unabhängige Gleichungen; das sind gerade soviel, wie der Zahl der Parameter einer LORENTZ-Transformation entspricht.

Gl. (14) nimmt mit der Bedingung (15) folgende Gestalt an

$$\gamma_\lambda S \psi'_{,\lambda} = 0. \tag{18}$$

Multipliziert man von links mit S^{-1} und beachtet, daß

$$S^{-1} \gamma_\lambda S = \gamma_\mu \alpha_{\lambda\mu} = \gamma_\mu \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\mu'}} \tag{19}$$

ist, so wird schließlich

$$\gamma_\mu \frac{\partial \psi'}{\partial x^{\mu'}} = 0. \tag{20}$$

Es existiert also in jedem Punkt des (euklidischen) Raumes ein orthonormiertes Bezugssystem, in dem der nichtlineare Term der Gl. (7) verschwindet. Legt man die Anfangsbedingungen fest, so sind diese Systeme durch (15) bestimmt und gehen durch LORENTZ-Transformation auseinander hervor. Ein solches Verhalten kann als eine dem Raum eingeprägte Windung, die durch den Term $\overline{\psi} \gamma_\lambda \gamma_5 \psi$ repräsentiert wird, verstanden werden.

Anhang

Der Nachweis, daß zwischen den der Gl. (15) entsprechenden Gleichungen Identitäten bestehen, kann in folgender Weise geführt werden: Zunächst sei bemerkt, daß (15) invariant ist gegen die Transformation

$$S \to S S_0, \quad S^{-1} \to S_0^{-1} S^{-1}, \quad S_0 = \text{const}, \ \det S_0 \neq 0. \tag{21}$$

Das bedeutet, daß die Festlegung einer bestimmten Anfangsbedingung von S keine Auszeichnung irgendeines Punktes bedeutet. Daher kann, wenn man eine infinitesimale Transformation betrachtet, stets von dem Ausdruck

$$S = 1 + \varepsilon_A \beta_A \qquad A = 1, 2, \ldots, 6 \tag{22}$$

ausgegangen werden; die ε_A sind die infinitesimalen Parameter einer LORENTZ-Transformation. Man erhält nun mit diesem Ausdruck unter Vernachlässigung von Größen, die von höherer Ordnung klein sind, aus (15) die folgenden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} -\varepsilon_{2,3}+\varepsilon_{3,2}+\varepsilon_{4,4}&=0\,,\\ -\varepsilon_{3,1}+\varepsilon_{1,3}+\varepsilon_{5,4}&=0\,,\\ -\varepsilon_{1,2}+\varepsilon_{2,1}+\varepsilon_{6,4}&=0\,,\\ -\varepsilon_{4,1}-\varepsilon_{5,2}-\varepsilon_{6,3}&=0\,, \end{aligned}\right\} \qquad (23\,\text{a})$$

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{5,3}-\varepsilon_{6,2}-\varepsilon_{1,4}&=C_1\,,\\ \varepsilon_{6,1}-\varepsilon_{4,3}-\varepsilon_{2,4}&=C_2\,,\\ \varepsilon_{4,2}-\varepsilon_{5,1}-\varepsilon_{3,4}&=C_3\,,\\ \varepsilon_{1,1}+\varepsilon_{2,2}+\varepsilon_{3,3}&=C_4\,. \end{aligned}\right\} \qquad (23\text{b})$$

Aus den 4 letzten Gleichungen folgt durch Differentiation und Summation

$$C_{\lambda,\lambda}=0\,. \qquad (24\,\text{a})$$

Beachtet man die Abkürzung (8), so läßt sich leicht an Hand der Gl. (7) zeigen, daß (24 a) eine Identität ist: Man multipliziert (7) von links mit $\overline{\psi}\,\gamma_5$ und die zu (7) adjungierte Gleichung von rechts mit $-\gamma_5\,\psi$. Aus der Summe folgt [4]

$$(\overline{\psi}\,\gamma_\lambda\,\gamma_5\,\psi)_{,\lambda}\equiv l^{-2}\,C_{\lambda,\lambda}=0\,. \qquad (24\,\text{b})$$

Die 2. Identität ergibt sich aus den 4 ersten Gleichungen (23 a): Differenziert man die 1. bzw. 2., 3. Gleichung nach x^1 bzw. x^2, x^3 und addiert, so erhält man

$$\varepsilon_{4,41}+\varepsilon_{5,42}+\varepsilon_{6,43}\equiv(\varepsilon_{4,1}+\varepsilon_{5,2}+\varepsilon_{6,3})_{,4}=0\,. \qquad (25)$$

Daraus folgt durch Integration unter Beachtung der Forderung nach Symmetrie in allen 4 Koordinaten die 4. Gleichung. Für den Fall, daß neben dem Pseudovektor C_λ noch ein Vektor A_λ vorkommt, d. h., in (15) noch ein Term mit $\gamma_\lambda\,A_\lambda$ auftritt, sind die rechten Seiten der Gln. (23 a) nicht gleich Null, sondern beziehungsweise gleich A_1, A_2, A_3, A_4. Damit die 2. Identität gewährleistet ist, muß man fordern

$$A_{\lambda,\lambda}=0\,. \qquad (26)$$

Identifiziert man z. B. A_λ mit dem Potential des elektromagnetischen Feldes, so ist (26) die sogenannte LORENTZ-Bedingung. Definiert man dagegen $A_\lambda \underset{\text{def.}}{=} \overline{\psi}\,\gamma_\lambda\,\psi$, so ist die (26) entsprechende Gleichung

$$(\overline{\psi}\,\gamma_\lambda\,\psi)_{,\lambda}=0 \qquad (27)$$

eine aus (7) folgende Identität.

[4] Die Gln. (24 b) und (27) werden üblicherweise als Erhaltungssätze gedeutet, die aus der Invarianz der Gl. (7) gegen die PAULI–GÜRSEY-Transformation folgen. [Siehe z. B. E. SCHMUTZER, Wiss. Z. Univ. Leipzig, 11. Jahrgang (1962), Math. Nat. Reihe, Heft 2.]